8. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 14 Q, Winter 2025/26

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 8.1 Untersuchen Sie, wo folgende Funktionen nach x bzw. y partiell differenzierbar sind (und wo nicht), und bestimmen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^y, \text{ wobei } x > 0, \\ g(x,y) &= e^{xy^2} \ln(x^2+y^2), \text{ wobei } (x,y) \neq (0,0), \\ h(x,y) &= \sqrt{x^2+3y^4}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) = y\,f(x,y)\,.$$

Zeigen Sie:

1) f ist bei $(0,0)$ partiell, aber nicht total differenzierbar.
2) g ist (in allen Punkten) total differenzierbar.

Aufgabe 8.3 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die zugehörende quadratische Form

$$q(\bar{x}) = \bar{x} A\, \bar{x}^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j\,.$$

Zeigen Sie: q ist bei jedem $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und für den Gradienten gilt:

$$\operatorname{grad} q(\bar{a}) = 2\,\bar{a} A$$

Aufgabe 8.4 Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = 3xy^2 + x^2 e^y$$

Bestimmen Sie für den Punkt $\bar{a} = (3,0)$

1) den Gradienten $\operatorname{grad} f(\bar{a})$,
2) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$ in Richtung $\bar{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$,
3) die Hesse-Matrix $H_f(\bar{a})$.

Aufgabe 8.5 Untersuchen Sie, ob die quadratischen Formen zu folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$